Ventura Reyes Prósper

JOSÉ COBOS BUENO

En los últimos años se le ha dado un protagonismo a nuestro paisano que creemos de justicia.

Así en 1991 se publican dos hermosas biografías[1]. En la década de los 60 el profesor del Val[2] le dedica dos trabajos donde analiza a nuestro autor como investigador en Lógica, reproduciendo los trabajos que en este campo publicó y haciendo un análisis muy lisonjero de Ventura Reyes Prósper. Y en fecha reciente han aparecido dos trabajos, de los cuales soy autor, sobre este insigne investigador. En uno[3] se hace una aproximación al científico y se reproducen los trabajos que nuestro autor realizó sobre bio-bibliografías. En el otro[4], se hace un análisis de su obra en el campo que se cree tuvo las mayores e importantes contribuciones, por las cuales se encuentra referenciado en obras sobre Geometrías no-Euclídeas y en las Enciclopedias especializadas.

En este último trabajo se reproducen, en forma facsímil, los tres trabajos que publica en las revistas internacionales, dos en *Mathematische Annale* (Alemania) y el otro en el *Bulletin de la Societé physico-mathematique* de Kasan (Rusia).

Faltaba para completar el estudio de nuestro ilustre paisano, reproducir el resto de su obra sobre geometrías.

---

[1]COBO, Jesús: *Reyes Prósper.* Biografías Extremeñas. Dpto. Publicaciones Diputación de Badajoz. Badajoz. 1991.; PÉREZ GONZÁLEZ, F.T.: *Tres filósofos en el cajón*. Colección la Centena. Ed. Regional de Extremadura. Mérida (Badajoz). 1991.

[2]VAL, J.A. del: «Un lógico y matemático español del siglo XIX: Ventura Reyes y Prósper». *Revista de Occidente*. T. XII. (Segunda época). Enero-Febrero-Marzo. 1966. pp. 222-261; VAL, J.A. del: «Los escritos lógicos de Ventura Reyes y Prósper (1863-1922)». *Teorema III*, 2-3. 1973. pp. 315-354.

[3]COBOS BUENO J.: "VENTURA REYES PRÓSPER: una aproximación al científico", *Revista Extremadura*, NUM 12, Segunda Época, Septiembre-Diciembre 1993, pp. 101-125.

[4]COBOS BUENO J.: "Un geómetra extremeño del siglo XIX: VENTURA REYES PRÓSPER", *Memorias de la Real Academia de Extremadura.de Artes y Letras*, Vol. II, 1994, pp. 91-137.

Y aunque se me acuse de reiterativo, en el presente trabajo además de cumplir el objetivo propuesto se van a repetir algunos juicios ya emitidos así como un breve análisis de la obra que al final se reproduce.

Así decir que D. Ventura Reyes Prósper, nace en Castuera el 31 de mayo de 1863 y muere en Toledo el 27 de noviembre de 1922. Estudia la Licenciatura y doctorado de Ciencias Naturales en la Universidad de Madrid. Nuestro personaje obtiene en ambos títulos la calificación de Premio Extraordinario.

Su trabajo de Tesis titulado: *Catálogo de las aves de España, Portugal e Islas Baleares*, fue tan importante que pasó a englosar los fondos del British Museum. En 1986 se publica en edición facsímil por la Delegación de Parques y Jardines del Excmo. Ayuntamiento de Badajoz.

Aunque nace y vive en el "Siglo de las Luces", al nacer en España, tuvo la desventaja de jugar siempre en campo contrario, lo cual le significó vencer unas resistencias que sus coetáneos europeos no sufrieron. Se hace viva la aseveración de otro ilustre paisano D. Francisco Vera[5]:

> «La ciencia no es algo independiente del hombre, sino una parte de la totalidad de la vida humana y si puede hablarse, en particular, de los conocimientos científicos de una cierta sociedad, de un país determinado o de una época dada, la historia de la Ciencia, en general, hay que abordarla en función de la Vida Social y del espíritu del tiempo».

Las circuntancias de España hace que el espíritu científico del "Siglo", como muchas otras cosas, llegue con bastante retraso. Sirva como ejemplo que después de sortear muchos y variados problemas la enseñanza se institucionaliza a partir del reinado de Isabel II (1833-1868). Es en esta época cuando se crea el Instituto de Segunda Enseñanza en Badajoz[6].

Sin embargo nuestro autor trabajó con una normativa y un rigor que se adquiere en España bien avanzado el siglo XX. Así hace decir a Rey Pastor[7]:

> "porque había vencido el complejo de inferioridad que acobardaba a casi todos los españoles, y porque además tenía cosas interesantes que decir en los variados sectores de su sabiduría".

---

[5]PECELLÍN LANCHARRO, M.: *Francisco Vera.* Biografías Extremeñas. Dpto. Publicaciones Diputación de Badajoz. Badajoz. 1988.

[6]SÁNCHEZ PASCUA F.: *El Instituto de segunda ènseñanza de Badajoz en el siglo XIX (1845-1900).* También en *Catálogo sobre los orígenes de la enseñanza Media . Badajoz en el siglo XIX.* Badajoz. 1991.

[7]RÍOS, S.; SANTALÓ, L. A.: GARCÍA CAMARERO, E.: *Julio Rey Pastor, Selecta.* Edición preparada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Fundación Banco Exterior de España. Madrid. 1975.

Así se puede considerar que los matemáticos anteriores a Torroja, Echegaray y Reyes Prósper, pertenecen a lo que se considera como siglo XIX español. Y que éstos, en cambio, por muy en el siglo XIX que nacieran y vivieran, trabajaron con una normativa moderna y reanudaron la introducción de teorías y estudios foráneos interrumpida, de hecho, desde la Guerra de la Independencia.

En rigor, más que la Ciencia en sí fueron mal vistos los científicos, que cada vez se sentían más atraídos por la política, y durante la guerra de la Independencia se habían escindido en afrancesados y liberales. Ambos grupos eran considerados como sospechosos por Fernando VII y, en consecuencia, tuvieron que exiliarse o fueron sancionados en 1814 y 1823 respectivamente.

El trienio liberal tuvo consecuencias más graves si cabe que la Guerra de la Independencia para el desarrollo cultural del país, puesto que durante los mismos los liberales –en cuyas filas militaban la mayoría de los científicos– al manifestar abiertamente sus ideas, tuvieron que emigrar al triunfar la reacción absolutista y contemplaron, impotentes, cómo Fernando VII disolvía las Reales Academias y otras entidades por haber admitido en su seno a hombres sin "ilustración, concepto ni moralidad". La huida fue en masa y los que no lo hicieron, perdieron sus cargos académicos y se vieron sometidos a expedientes de purificación. Entre estos últimos destaquemos al matemático natural de Zafra y catedrático de Álgebra de la Universidad de Salamanca, Juan Justo García (1752-1830)[8].

Es de resaltar que a pesar de emigrar a los paises de Europa: Francia, Inglaterra, Alemania, etc.; son pocos los que aprovechan la coyuntura de ponerse en contacto con científicos de estos países, lo que puede significar el aislamiento en que vivían.

A pesar de que el siglo XIX es el siglo de Oro de la formalización de la Matemática, se entiende que hasta el tercio final de este siglo no aparezcan en España algunas de estas nuevas teorías.

Según Rey Pastor[9] nuestro paisano era un hombre de vastísima cultura idiomática –conocía el francés, alemán, inglés, ruso, sueco, noruego, griego y latín–, naturalista y arqueológica, autor de importantes investigaciones sobre moluscos, pájaros y fósiles que le valieron prestigio europeo.

Pero es, sin lugar a dudas, en Matemática donde brilla con luz propia, y habría que encajarlo como uno de los mejores de su época. Hay que esperar

---

[8]CUESTA DUTARI, N.: *El Maestro Juan Justo García*. Publicaciones Universidad de Salamanca. Salamanca. 1974.

[9]RÍOS y otros. (Op. cit.)

unos años, aparece otra figura D. Julio Rey Pastor, para ver matemáticos españoles que publican en Revistas del máximo nivel europeo. Posteriormente se pasa por otro "agujero negro" y hay que esperar hasta la década de los 70 de nuestro siglo, para que sea usual ver trabajos de matemáticos españoles en Revistas de todo el mundo.

D. Ventura Reyes Prósper destaca en dos campos de las matemáticas que se estaban "construyendo" en ese momento: Lógica Matemática y Geometrías no-Euclídeas.

En 1887 acompaña a su hermano Eduardo (Catedrático de Botánica de la Universidad Complutense) a un viaje a Alemania y traba amistad duradera con F. Klein y Ferdinand Lindermann, investigadores alemanes en Lógica Matemática, así como en Geometrías no-Euclídeas.

Asimismo, como él reconoce, su interés por la Lógica se despertó después de leer una obra de Shröder, al cual le dedica un trabajo que publica en *El Progreso Matemático* (Zaragoza), en 1892

Como es conocido, la Lógica formal, que se pensaba que había sido totalmente acabada por Aristóteles, toma un nuevo rumbo a partir de la segunda mitad del siglo XIX, debido a que recogen la antorcha de la renovación matemáticos y no filósofos.

Pues bien, Reyes Prósper, introduce la Lógica en España, a pesar de que se dice que Cortázar[10] tenía unos apuntes sobre lógica matemática "que es posible vean la luz pública algún día". Pero el hecho cierto es que Ventura Reyes Prósper publica en *El Progreso Matemático* (periódico de investigación y divulgación de la matemática fundado y publicado en Zaragoza por Zoel García de Galdeano), entre 1891-1894, siete trabajos sobre el tema. Hay que esperar hasta 1929 para que aparezca la siguiente obra -en castellano- de Lógica por otro ilustre paisano, D. Francisco Vera Fernández de Córdoba[11].

A la vez, desde 1887 a 1910, publica diez trabajos sobre Geometrías, de los cuales dos publica en la prestigiosa revista alemana *Matematische Annale*, revista en la que colaboran entre otros David Hilbert, Georg Cantor, Sophus Lie, etc. –por los datos que se poseen es el primer español que publica en una revista extranjera– uno en el *Bulletin de la Societé physicomathematique* de Kasan (Rusia), otro en *The Educacional Time* (Londres)[12], dos en *Archivos de Matemáticas*

[10]PÉREZ GONZÁLEZ, F.T. (Op. cit.)

[11]PECELLÍN LANCHARRO, M. (Op. cit.)

[12]A pesar de los esfuerzos realizados es el único trabajo que no hemos podido conseguir.

puras y aplicadas (Valencia), cinco en *El Progreso Matemático* y uno en la *Revista Matemática Hispano-Americana.*

También escribe trabajos sobre Biografías de matemáticos ilustres, así en 1893 le dedica tal trabajo a Nicolás Ivanovich Lobachefski en *El Progreso Matemático*, en el mismo medio y en 1894 es a Wolfgang y Janos Bolyai (padre e hijo); a la obra científica de Seki y sus discípulos -da un repaso histórico a la matemática en Japón- le dedica un trabajo que publica en la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, en 1904; así como a otro ilustre paisano Juan Martínez Silíceo le dedica unas notas biográficas en la *Revista de la Real Sociedad Matemática Española* en 1911.

Publicó además trabajos en los periódicos científicos: "Boulletin de Mathematikues de Niew Reuglowski", y "La Naturaleza"; además de publicar en "El Aspirante" de Toledo[13].

Después de leer su curriculum se entiende que los sesudos profesores que formaban el Tribunal que lo tenía que examinar para Catedrático de Matemática de Instituto[14] pensaran de todo, menos que era "normal", cuando el 27 de Agosto de 1888 leyeran y oyeran lo que sigue:

> "En el presente programa procuro introducir aquellas modificaciones que en Francia, Italia, Inglaterra, Rusia y Alemania especialmente, son ya vulgares. No en balde los sabios trabajan en el acrecentamiento de la Ciencia. Es menester enseñar los nuevos descubrimientos. He procurado ser extremadamente conciso en las cuestiones sencillas, pues es probado que en poquísimo tiempo pueden aprenderse".

Y para no quedarse sólo en palabras –de las que tan duchos eran los científicos de su momento–, el programa comenzaba tratando las "nuevas ideas sobre el objeto de la Matemática según los trabajos de Carmichel, Boole, Staudt, Gauss, Lobachefski, Riemann, Bolyai, Grassmann, etc". También incorporaba la Teoría de las sustituciones (Determinantes), según Cauchy y Galois, además de la "Algoritmia de la Lógica según Boole, Grassmann, Peirce y Schröder". La Geometría estaba dedicada a las teorías de Lobachefski y Bolyai basándose en los trabajos de Staudt, Klein y Pasch. La Geometría Euclídea la exponía como un caso particular de la Geometría no-Euclídea.

Y todo esto arropado con abundantes referencias históricas con la intención de que el alumno situara la teoría en su contexto.

---

[13]GARMA PONS, Santiago: «Las Matemáticas en España en la primera mitad del siglo XX». *Actas XV Jornadas Luso-Espanholas de Matemática.* Vol. VI. Serviço de Reprografia e Publicaçoes da Universidade de Évora. 1991.

[14]VAL, J.A. del. (Op. cit.)

Obviamente no aprobó las oposiciones, puesto que si se da un somero repaso a los planes de estudios y a los libros al uso, de su época, se percibe lo alejado que estaba su pensamiento científico del de sus coetáneos así como de la matemática oficial.

El reconocimiento como investigador se puede resumir[15]:

Formó parte del Comité Internacional Permanente de Hornitología en el Congreso Internacional de Budapets, y en Septiembre de 1898 fue nombrado Miembro de la Sociedad Física Matemática de la Imperial Universidad de Kasan (Rusia). También formó parte de la Sociedad Astronómica de Francia y miembro corresponsal de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Madrid. Miembro de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando, en 1903 fue nombrado Comendador de la Orden de Alfonso XIII y en 1913 Vocal de la Real Sociedad Matemática Española.

Relación de trabajos publicados por Ventura Reyes Prósper

Sobre geometrías[16]

— "Sur la géométrie non-Euclidienne", *Math. Ann.*, 1887, T. XXIX, pp. 54-156.

— "Sur les propiétés graphiques des figures centriques (Extrait d'une lettre adressé a Mr. Pasch)", *Math. Ann.*, 1888, T. XXXII. pp. 157-158.

— "Nota acerca de la geometría proyectiva sobre la superficie esférica". *El Progreso Matemático II,* 1892, n. 13, pp. 7-10.

— "Resolución de un problema propuesto por Jacobo Steiner". *El Progreso Matemático II*, 1892, n. 17, pp. 147-148.

— "Recensión de Dodgson [Lewis Carroll]. Curiosa mathematica. Parte I. A new Theory of Parallels. London, 1890, tercera edición". *El Progreso Matemático II*, 1892, n. 21, pp. 265-266.

— "Breve reseña histórica de la Geometría no-Euclídea, especialmente de dos y tres dimensiones". *El Progreso Matemático IV*, 1894, n. 37, pp. 13-16.

— "Algunas propiedades referentes a los sistemas de círculos, demostradas

[15]SAN JUAN, R.: «La obra científica del matemático español D. Ventura de los Reyes Prósper». *Gaceta Matemática* II. nº 2. 1950. pp. 39-41; GARMA PONS. (Op. cit.)

[16]Cfr. nota 4.

sin el auxilio de relaciones métricas ni del postulado euclídeo". *El Progreso Matemático, segundo semestre*, 1895. pp. 205-208.

—"Nueva demostración de las fórmulas trigonométricas de un ángulo igual a la suma o diferencia de dos dados". *Archivos de Matemáticas Puras y Aplicadas, I*, 5, 1896, Valencia, 89-91.

—"Nota sobre un punto de geometría no euclídea". *Archivos de Matemáticas Puras y Aplicadas, II*, 3, 1897, Valencia, 44-47.

—"Note sur le théoréme de Pythagore et la géométrie non-Euclidienne". *Bull. de la Societé physico-mathematique de Kasan,* 1897, Deuxiéme Série, T. I, pp. 67-68.

—"Nota con dos demostraciones nuevas de proposiciones trigonométricas". *The Educacional Times, n. 1*, 1910.

—"Restitución de una de las obras perdidas de Euclides". *Revista Matemática Hispano-Americana, I*, 10. 1919. pp. 323-325.

SOBRE LÓGICA[17]

—"El raciocinio a máquina". *El Progreso matemático* I, 1891, n. 9, pp. 217-220.

—"Christina Ladd-Franklin, matemática americana y su influencia en la lógica simbólica". *El Progreso matemático* I, 1891, n. 12, pp. 297-300.

—"Ernesto Schröeder. Sus merecimientos ante la lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras". *El Progreso matemático* II, 1892, n. 14, pp. 33-36.

—"Charles Santiago Peirce y Oscar Howard Mitchell". *El Progreso matemático* II, 1892, n. 18, pp. 170-173.

—"Proyecto de clasificación de los escritos lógico-simbólicos, especialmente de los post-boolianos". *El Progreso matemático* II, 1892, n. 20, pp. 229-232.

—"Nuevo modo de considerar la aritmética". *El Progreso matemático* III, 1893, n. 25, pp. 23-26.

—"La lógica simbólica en Italia". *El Progreso matemático* III, 1893, n. 26, pp. 41-43

[17]Cfr. nota 2.

SOBRE BIO-BIBLIOGRAFÍAS[18]

— "Wolfgang y Juan Bolyai. Reseña bio-bibliográfica". *El Progreso matemático.* 38 (15 febrero 1894), pp. 37-40.

— "Nicolas Ivanovich Lobacheski. Reseña biográfico-bibliográfica". *El Progreso matemático*, año III, núm. 36, 1893. pp. 321-324.

— "La obra científica de Seki y sus discípulos". *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* T.1, 1904. pp. 251-254.

— "Juan Martínez Silíceo". *Revista de la Sociedad matemática Española.* Año 1.°, núm. 5, 1911. pp. 153-156.

OTRAS PUBLICACIONES

— "Catálogo de las aves de España, Portugal e Islas Baleares". *Anales de la Sociedad Española de Historia natural*, tomo XV. Madrid 1886, pp. 5-109. Publicado también en tirada aparte con el siguiente pie: Madrid. Imprenta de Fortanet, calle de la Libertad, n. 29, 1886. En 1991 el Ayuntamiento de Badajoz publicó esta obra en facsímil.

— "Nuevas noticias acerca del astrónomo toledano Arzaquel". *Boletín de la Soceidad Arqueológica de Toledo.* 6 (30-noviembre-1900).

— "Dos toledanos ilustres en la luna". *Boletín de la Sociedad Arqueológica de Toledo* 1 (31-enero-1900).

— "Lista de los moluscos recogidos por el doctor Osorio en Fernando Poo y en el Golfo de Guinea". *Anales de la Sociedad Española de Historia Natural.*

Breve análisis en orden cronológico de los trabajos de Geometría publicados por Ventura Reyes Prósper[19]

— "Nota acerca de la Geometría proyectiva sobre la superficie esférica".

En este trabajo reproduce la demostración que da en 1888 de un resultado que resume así:

> La esfera, superficie que tiene en campo finito sus puntos, no exige consideraciones de puntos en el infinito para establecer su geometría proyectiva, tampoco exige relaciones métricas y, por último, no hace falta para ello más que echar mano de las más elementales proposiciones referentes a rectas y planos.

[18]Cfr. nota 3.

[19]Aunque se hace un análisis más detallado de estos trabajos en COBOS BUENO, J. (Op. cit.), aquí se va a dar un extracto.

— "Resolución de un problema propuesto por Jacobo Steiner".

Conocido el teorema -atribuido a Robert Simson-,

"si desde un punto w, situado sobre una circunferencia se trazan perpendiculares a los tres lados de un triángulo inscrito en ella, los tres pies de dichas perpendiculares están en línea recta",

el problema que plantea Steiner y que resuelve nuestro autor es:

Dados una circunferencia y un triángulo inscrito en la misma, hallar sobre la circunferencia un punto tal que los tres pies de las perpendiculares trazadas a los tres lados del triángulo, estén sobre una recta paralela a otra recta dada de antemano.

— "Dodgson-Curiosa Mathematica. Parte I. A new theory of parallels. London 1890. Tercera edición".

Hace una análisis de esta obra y expone que su principal mérito estriba en hacer ver la mutua dependencia existente entre el Postulado Euclídeo referente a las paralelas y ciertas proposiciones sobre áreas. Reyes Prósper muestra que ofrecen las mismas dificultades para ser admitidas.

— "Breve reseña histórica de la Geometría no-Euclídea, especialmente de dos y tres dimensiones".

Trabajo fundamental para todo investigador que quiera hacer un análisis sobre la evolución de las diversas geometrías. Demuestra un conocimiento exhaustivo sobre esta materia que estaba formalizándose.

— "Algunas propiedades referentes a los sistemas de círculos, demostradas sin el auxilio de relaciones métricas ni del postulado Euclídeo".

Siguiendo la línea marcada por Poncelet, Monge y Hankel de simultanear el estudio de la Geometría del espacio con el de la Geometría del plano, en este trabajo establece algunas propiedades vulgares referentes al círculo, con independencia de medidas y paralelismo.

— "Nueva demostración de las fórmulas trigonométricas de un ángulo igual a la suma o diferencia de dos dados".

En una corta nota (tres páginas), deduce por medio de consideraciones estereométricas (parte de la geometría que trata de la medida de los sólidos), las fórmulas que expresan el valor del seno y coseno de $\alpha \pm \beta$. Justifica este trabajo por su intento de buscar un cierto enlace entre la Geometría plana y la del espacio.

— Bibliografía: “Restitución de una de las obras perdidas de Euclides”.

En este trabajo, que se podría encajar como bibliográfico, después de criticar la labor del Imperio romano, que permitió la desaparición de obras geniales de excelsos geómetras griegos, nos introduce en los intentos que ha habido de reconstruir algunas de estas obras, muchas veces a partir de las versiones árabes y otras a partir de manuscritos incompletos.

Nota acerca de la Geometría Proyectiva sobre la superficie esférica[1]

POR D. VENTURA REYES PRÓSPER
CATEDRÁTICO EN EL INSTITUTO DE TERUEL

Uno de los mayores progresos que los Monge, Poncelet, Steiner, Staudt y tantos otros ilustres geómetras, han hecho experimentar en este siglo á la Geometría, es no ya solo el descubrimiento de nuevas verdades, sino la simplificación de los métodos geométricos, que ha hecho asequibles á personas de escasa instrucción matemática, teorías antes difíciles y que exigían para aprenderse un extenso caudal de conocimientos. Así, que demostraciones á la vez rigurosas, elegantes y sencillas, han ido sustituyendo á otras menos directas y plagadas de larguísimas fórmulas, innecesarias muchas veces, dado lo trivial del asunto.

Dos métodos hay, dice un eminente geómetra francés, para el adelanto de la ciencia: consiste el uno en descubrir nuevas verdades, y el otro en facilitar cada vez más el acceso á las ya descubiertas: si algún medio hubiese de hacerla retroceder, este consistiría en suprimir verdades conocidas ó en embrollar y hacer dificultosa su enseñanza.

Quien lea las colecciones matemáticas de Pappus, las obras de Chasles, contemporáneo maestro, puede observar con facilidad, como á menudo, demostraciones largas, penosas y fundadas en relaciones métricas, pueden sustituirse con grandísima ventaja por otras que Cristian Von Staudt emplea en su áureo libro *Die Geometrie der Lage*.

Ciertamente, que al matemático de profesión, le es indispensable de todo punto el poseer á la vez los métodos algébricos y los sintéticos, más no lo es menos que también pertenece á la ciencia el deslindar unas teorías de otras, si hay determinada independencia entre ellas. De este modo la disciplina que menos postulados necesita, viene á tener prelación sobre las otras. Aparte de que, tratar doctrinas que son consecuencia inmediata y rigurosa de proposiciones elementales, mediante poderosos instrumentos anlíticos, es semejarse á aquel buen hombre que pedía prestada su maza á Hércules tebano y á Zeus olímpico sus rayos, para acabar con los insectos que le molestaban. Además, al que solo busca verdades para aplicarlas enseguida á una profesión determinada, lo que

[1]*El Progreso matemático* II, 1892, n. 13, pp. 7-10.

le importa es tener un camino breve y seguro de llegar á ellas, y los nuevos procedimientos son como Hankel dice *la vía real* que Ptolomeo pedía á Euclides.

La obra de separación y simplificación, ha sido recientemente continuada por un sabio profesor alemán el Sr. Pasch de la Universidad de Giessen[2] quien siguiendo las trazas del esclarecido Félix Klein, ha puesto en claro de qué modo la geometría de posición ó proyectiva, no tan solo es por completo independiente de consideraciones métricas, según Staudt ya probó, sino que también puede en ella prescindirse absolutamente de toda hipótesis sobre paralelismo. No necesitamos pues saber cual es el lugar de los puntos en el infinito, sobre un plano ó en el espacio; ni aun siquiera ocuparnos de los puntos de dicho lugar. ¡Y que simplicidad y rigor tan admirables los de sus razonamientos! Una persona de escasa cultura científica, podría comprender la obra de Pasch. Quizás no habría inconveniente de introducirla en la enseñanza secundaria.

Como me he ocupado de este asunto en dos notas publicadas en los *Mathematische annalen* que dirige el eminente Klein, voy á exponer aquí algunas consideraciones adicionales referentes á la geometría proyectiva sobre la superficie esférica.

No conozco ninguna obra que se ocupe exclusivamente de esta parte de la Geometría[3]. El ilustre Gudemann consagra parte de su bellísima obra *Lehrbuch der niederen Spärik* á la exposición de estas teorías, más como su desarrollo lo funda en fórmulas trigonométricas, es penoso y árido el camino seguido. Se puede poner de todos modos en evidencia, que los resultados obtenidos allí, son independientes de la teoría de las paralelas, dado que que hoy sabemos la independencia establecida desde tiempos de Bolyai y Lobachefski[4] entre la Trigonometría esférica y el postulado Euclídeo.

Jacobo Steiner, uno de los mayores génios geométricos que hayan nunca existido, observa á propósito de nuestra cuestión (Jacobo Steiner's Werke I Band, p.ª 323, Zweite Anmerkung): "*... Como se vé no encierran nada nuevo las consideraciones sobre la superficie esférica, sino que son una limitación particular de las consideraciones referentes al manojo de rayos. Las investigaciones sobre la superficie esférica, tiene la importancia de permitir una vista de conjunto sobre una superficie...*". Hallamos, pues, que como aquí se observa, para establecer las proposiciones

[2] Véase su hermosísima obra: "*Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig*"

[3] La Geometría proyectiva sobre el plano (prescindiendo de la Geometría del espacio) forma el objeto de una buena obra: *Die proyection in der Ebene,* de Weissenborn.

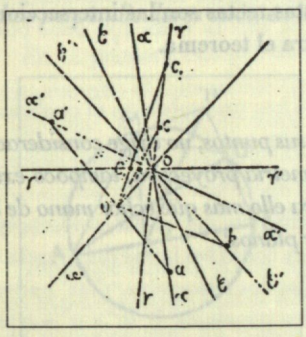
[4] Así debemos escribir y leer nosotros el nombre de este geómetra, que los franceses escriben *Lobatchewsky.*

referentes á la Geometría proyectiva sobre la esfera, basta fundar primero las correspondientes á las figuras radiadas ó céntricas como Pasch las llama, y luego cortar la figura en cuestión por una esfera cuyo centro coincida con el del manojo[5].

Ahora bien, asi como toda la geometría proyectiva del plano se deduce de la proposición referente á diez rectas, conocida vulgarmente por Teorema de Desargues, del mismo modo la de las figuras radiadas es consecunecia del teorema correspondiente al anterior y relativo á diez planos que desde un punto común proyectan el mencionado sistema de rectas.

Queda reducida pues, la cuestión á demostrar este teorema. Yo lo demostré en 1887, independientemente de ideas métricas y de consideraciones referentes al infinito.

Mi demostración pareció al Sr. Pasch la más sencilla posible (...Auf denkbar einfachste Art..., Pasch in litt). Voy á reproducirla aquí:



Sean

ox, ox'
$o\zeta$, $o\zeta'$
$o\gamma$, $o\gamma'$

tres pares de rectas, estando cada par situado en un mismo plano con la recta $o\omega$. Supongo que las rectas ox, $o\zeta$, $o\gamma$, lo mismo que las ox', $o\zeta'$, $o\gamma'$ no caen en un mismo plano. Probaremos que las rectas de intersección de los planos determinados por ox, $o\zeta$ y ox', $o\zeta'$; ox, $o\gamma$ y ox', $o\gamma'$, $o\zeta$, $o\gamma$ y $o\zeta$, $o\gamma'$, caen las tres sobre un mismo plano.

Tomemos en efecto

sobre ox el punto a,
sobre ox' el punto a'

de tal modo que la recta aa' corte á la $o\omega$ en o', de manera que los puntos o', a, y a' estén dispuestos en el orden $ao'a'$ (lo que siempre es posible).

Por el punto o' tracemos una recta tal que cortando á oz y oz' en b y b', los puntos o', b y b' estén arreglados en el orden $o'bb'$ (lo que bien es siempre factible).

[5] *Strahlbüschel.*

Finalmente, tracemos por o' una recta tal que cortando á $o\gamma$ y $o\gamma'$ en c y c', estén dispuestos los puntos o', c, c' en el orden $o'c'c$ (lo que podemos siempre hacer).

Observemos que siempre podemos suponer que las rectas $ao'a'$, $o'bb'$ y $o'cc'$ no estén sobre un mismo plano (porque si cayesen en uno determinado, podríamos trazar por el punto o' una recta nueva $o'c_1c$ que sustituiríamos á la $o'c'c$, empleando las $ao'a'$, $o'bb'$ y $o'c_1c$).

Entonces las rectas

ab y $a'b'$ se cortarán forzosamente en C,
bc y $b'c'$ . . . . en A,
ac y $a'c'$ . . . . en B,

y según la situación perspectiva de los triángulos abc y $a'b'c'$ (que no caen sobre un mismo plano) los puntos A, B y C estarán en una misma recta y las rectas oA, oB, oC caerán sobre un mismo plano, y como estas rectas son las intersecciones de que hablamos en el enunciado, esto demuestra el teorema.

Resumen de lo expuesto:

La esfera, superficie que tiene en campo finito sus puntos, no exige consideraciones de puntos en el infinito para establecer su geometría proyectiva, tampoco exige relaciones métricas y, por último, no hace falta para ello mas que echar mano de las más elementales proposiciones referentes á rectas y planos[6].

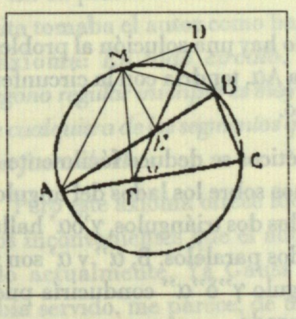
Madrid Diciembre 1891.

[6]Para no hacer confusa la figura, se han suprimido en ella algunas líneas y los puntos A, B, C.

Resolución de un problema propuesto por Jacobo Steiner[1]

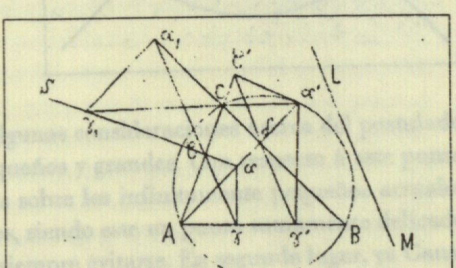
El egregio geómetra Steiner, tan notable por la pasmosa serie de sus descubrimientos y problemas ingeniosos, propuso uno de que voy á ocuparme y que es susceptible de una sencilla resolución geométrica-sintética. Yo no sé que se haya publicado alguna vez la solución de este problema, que se halla en la colección de las obras compuestas de Jacobo Steiner, publicadas bajo los auspicios de la Real Academia de Ciencias de Berlin, en el año 1881. Se refiere á un lindo teorema correspondiente á la circunferencia y atribuido universalmente á Roberto Simson, profesor de matemáticas en la Universidad de Glasgow y que falleció en dicha ciudad el año 1768.

Este teorema es: *Si desde un punto ω, situado sobre una circunferencia de círculo, se trazan perpendiculares á los tres lados de un triángulo inscripto, los tres pies de dichas perpendiculares están en línea recta.*



Suponemos conocido este teorema y su demostración.

El problema de Steiner es como sigue: *Dados una circunferencia y un triángulo inscripto en la misma, hallar sobre la circunferencia un punto tal, que los tres pies de las perpendiculares trazadas á los tres lados del triángulo, esten sobre una recta paralela á otra recta dada de antemano.*



He aquí ahora la solución. Sobre uno de los lados AC, por ejemplo, tomemos un punto ζ y levantemos en ζ una perpendicular á AC. Tracemos por ζ una recta paralela á la dirección dada LM y esta recta cortará á la AB en un punto γ. Levantemos en γ una perpendicular á

[1]*El Progreso Matemático* II, 1892, n. 17, pp. 7-10.

AB; las dos perpendiculares se cortarán en α. Unamos el vértice A del triángulo con el punto α, y la recta Aα cortará á la circunferencia en un α', que es precisamente el punto buscado. En efecto, trazando desde α' las perpendiculares a $\alpha'\zeta'$ y $\alpha'\gamma'$ á los lados AC y AB, los triángulos $\alpha\zeta\gamma$ y $\alpha'\zeta'\gamma'$, que tienen dos pares de lados paralelos y además sus vértices alineados dos á dos sobre tres rectas concurrentes en un punto, deberán también tener paralelos sus otros dos lados. Esto indica que $\zeta'\gamma'$ debe ser paralelo á $\zeta'\gamma$ y en consecuencia á LM.

Hubiésemos podido utilizar en vez del punto γ, intersección de la paralela á LM trazada por ζ con el lado AB, el punto α_1 en que dicha paralela corta á BC. En tal caso hubiésemos levantado en γ_1 una perpendicular á BC, y hubiésemos hallado su intersección γ_1 con la perpendicular $\zeta\alpha$, y uniendo el punto γ_1 con el c hallaríamos la intersección de $\gamma_1 c$ con la circunferencia.

Pero es fácil probar que la solución sería la misma. En efecto, supongamos ya resuelto el problema por el primer modo, los triángulos $\alpha_1\gamma_1\zeta$ y $\delta\alpha'\zeta'$ que tienen sus lados paralelos dos á dos, tendrán sus vértices alineados dos á dos sobre tres rectas concurrentes en un punto. Así es, que la recta $\gamma_1 C$ debe pasar por el punto α' antes hallado.

Es sencillo además el convencerse de que solo hay una solución al problema, para cada dirección dada, de lo contrario la recta Aα, tendría con la circunferencia un tercer punto α'' común, lo que es absurdo.

De las propiedades de los triángulos homotéticos se deduce fácilmente que la solución obtenida es idéntica, aunque operemos sobre los lados del ángulo en A, en B, ó en C. Véanse simplemente en la figura los dos triángulos, $\gamma'\delta\alpha'$ hallado según las instrucciones dadas, y el $\gamma''\delta''\alpha''$ de lados paralelos. B, α'' y α' son tres puntos que han de estar en línea recta. El triángulo $\gamma''\delta''\alpha''$ conduciría pues á igual solución que el $\alpha\zeta\gamma$, primeramente considerado.

PROF. DR. VENTURA REYES PRÓSPER

Madrid, 10 de Abril de 1892.

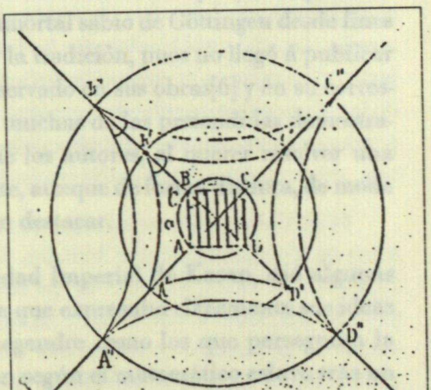
Bibliografía[1]

Dodgson.- CURIOSA MATHEMATICA.- Parte I. *A new theory of parallels.*- London, 1890. Tercera edición.

Hace más de un año cayó en mis manos este librito, y desde luego se me ocurrió hacer sobre él algunas observaciones que hoy formulo. Es, en efecto, sumamente curioso, y su principal mérito estriba en hacer ver la mútua dependencia existente entre el postulado euclídeo referente á las paralelas y ciertas proposiciones sobre áreas. Mas estas proposiciones ofrecen, como aquí me propongo mostrar, las mismas dificultades para ser admitidas. He aquí el porqué:

Supone el autor, como base de su trabajito, que

En todo círculo, el tetrágono regular inscripto tiene área mayor que la de cualquier segmento de los del círculo, que cae fuera de él. Es decir, que el cuadrado ABCD es mayor que el segmento $A\alpha\zeta B$.



En la primera edición de su obrita tomaba el autor como base el axioma: *En todo círculo, el exágono regular inscripto es mayor que cualquiera de los segmentos que caen fuera de él.*

Pero este axioma ofrece idénticos inconvenientes que el adoptado actualmente. Ya Gauss se había servido, me parece, de una imagen análoga á la de mi figura, á propósito de otra demostración falsa del postulado.

En apéndices coloca el autor algunas consideraciones acerca del postulado euclídeo y de los infinitamente pequeños y grandes. Con respecto á este punto diré que, en primer lugar, las ideas sobre los infinitamente pequeños actuales son diferentes entre los matemáticos, siendo este un punto sumamente delicado y espinoso que, á ser posible, debe siempre evitarse. En segundo lugar, ya Gauss

[1]*El Progreso matemático* II, 1892, n. 21, pp. 265-266.

ha indicado considerar al infinito como una cantidad determinada (*vollrndeten*), implica grandes riesgos, y esta idea ha sido puesta de relieve, desde Bolzano á Cantor, por muchos distinguidos matemáticos. A mi modo de ver, nada puede probarse de este apéndice. El mismo autor declara que su modo de ver es opinable.

Al final se añaden críticas justas de alguna de las demostraciones antes dadas del axioma euclídeo.

Es, en resumen, la obra en cuestión, un hermoso librito que hace desear la segunda parte, ya anunciada, de *Curiosa mathematica*. Su autor es harto ventajosamente conocido, por otra parte, del público matemático.

Pr. Dr. Ventura Reyes Prósper.

Breve reseña histórica de la Geometría No-Euclídea, especialmente de dos y tres dimensiones[1]

"Apenas transcurre año sin nuevas tentativas para demostrar el Postulado de Euclides": de este modo comenzaba Gauss la crítica de uno de los innumerables ensayos desgraciados hechos por diferentes geómetras con objeto de demostrar lo indemostrable; es, á saber: por un punto se puede trazar una paralela y una sola á cualquier recta dada. Los matemáticos dedicados á tan ingrata tarea han sido muchos, y algunos de ellos, por desgracia, de época reciente. Merecen citarse Matías Meternich[1]*, Schwab[2], Schumacher[3], Bertrán de Ginebra[4], Cartón y, como el más ilustre de todos ellos, Legendre[5]. Gauss comprendió, según se cree, á primera vista, que el postulado en cuestión ni puede demostrarse ni lo podrá ser nunca por el razonamiento, sino en todo caso, experimentalmente, y aun esto, si el hombre poseyese medios de observación que jamás poseerá. Que esta convicción fué adquirida por el inmortal sabio de Göttingen desde fines del pasado siglo, reposa sólo sobre dicho y la tradición, pues no llegó á publicar nada referente á esto. Lo que sí se ha conservado en sus obras[6] y en su correspondencia[7] son las acertadas críticas de muchas de las pretendidas demostraciones, probando él hasta la saciedad que los autores, al querer resolver una dificultad, la sustituían con otra equivalente, aunque de forma distinta, de modo que el nudo gordiano quedaba siempre sin destacar.

Lobachefski, profesor de la Universidad Imperial de Kasan, dió algunas conferencias en 1826 ante su Facultad, en que expresaba claramente sus ideas sobre el asunto. Tanto los trabajos de Legendre como los que perseguían la demostración del postulado Euclideo iban según el matemático eslavo tras un fantasma, puesto que no pudiendo ser probada tal proposición, puede ser falsa quizás y es preciso investigar las leyes del espacio bajo este último supuesto. Mejor aún, con independencia de una opinión ó de otra y en un caso general que pueda abarcar ambas como casos particulares. Esto es lo que Lobachefski hizo en la que denominó Pangeometría, geometría imaginaria y que se ha llamado también después geometría astral y Geometría No-Euclidea. Sus obras en este sentido[8] comenzaron á publicarse en el año de 1829 y terminaron en 1855 con su "Pangeometría".

[1]*El Progreso Matemático* IV, 1894, n. 37, pp. 13-16.

Sin tener noticias de estas investigaciones que se difundieron entonces poquísimo, comenzaron sus trabajos independientemente dos geómetras húngaros, Wolfgasy y Juan Bolyai, padre é hijo. Sus principales obras[9] fueron desatendidas por el vulgo durante mucho tiempo. Las conclusiones á que éstos tan modestos cuanto esclarecidos y desgraciados sabios llegaron, fueron los mismas á que habían conducido sus estudios á Lobachefski. Gauss, amigo de Bolyai padre, aprobó los trabajos de Juan Bolyai, del mismo modo que aprobó también los del astrónomo ruso en cuanto conoció alguna de sus publicaciones.

Por espacio de mucho tiempo permanecieron infructuosas tan profundas investigaciones, pero Bernardo Riemann, célebre profesor de Göttingen publicó en 1867 una Memoria[10] original é importantísima en que descubría otra nueva fase de la cuestión y sostenía que los axiomas y postulados de Euclides no son una necesidad lógica, de ningún modo. Su trabajo coincide en parte con otro[11] del egregio físico Hermann Helmholtz casi simultáneamente publicado. El primero de los dos trabajos citados es sumamente conciso y hecho sólo para ser leído por sabios, el segundo adolece de igual defecto, pero Helmholtz ha continuado después el camino haciendo popular la Geometría No-Euclidea en Alemania. Lo que principalmente ha dado el triunfo á esta ciencia es quizás el haber demostrado el eminente geómetra italiano Beltrami[12] que aun dentro de las ideas antiguas cabe dar una interpretación de la Geometría Lobachefskiana y que sus teoremas son aplicables á las superficies de curvatura constante negativa, de modo que este estudio no queda nunca estéril.

Félix Klein, profesor primero en Erlangen y luego en Leipzig y Göttingen dió á luz en los Mathematische Annalen de Leipzig notabílisimas y capitales Memorias[13]. En éstas, valiéndose de los trabajos de Cayley sobre propiedades proyectivas, llega á establecer y distinguir, estudiándolas sólidamente, las tres clases de geometrías posibles con respecto al postulado Euclideo: Geometría parabólica ó Euclidea, Geometría hiperbólica ó Lobachefskiana y Geometría elíptica ó de Riemann. El raciocinio no puede decidirse por alguna de ellas con preferencia. La observación parece que, hoy por hoy, da crédito á la geometría parabólica en que se supone que la suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos rectos; pero nuestros medios de observación son muy limitados y no aprecian cantidades de cierto grado de pequeñez. La Geometría hiperbólica admite que la suma de que tratamos es menor que dos rectos, y la geometría elíptica, que mayor. En otras palabras, Euclides supone que por un punto se puede tirar á una recta una paralela y sólo una, Lobachefski y Bolyai que dos, y Riemann que ninguna. De estas tres hipótesis es independiente la Geometría proyectiva, cierta en todo caso.

Además de los trabajos de Félix Klein, de este genio matemático, gloria de Alemania, debemos mencionar los de muchos geómetras eminentísimos. De Tilly se ha distinguido en estos estudios, publicando una obra[14] muy notable, cuya lectura debí ha muchos años á su bondad. Pasch[15], profesor de Giessen, Killing[16], Schlegel, discípulo de Grassmann (quien ya había iniciado también el estudio de los espacios de más de tres dimensiones), Schur, Frischauf[17] y Erdmann han difundido la Pangeometría en Alemania, al paso que Battaglini, Genocchi[18], Paolis, D'Ovidio y otros han hecho lo propio en Italia.

Poincaré, el eminente profesor de París, la ha aclimatado definitivamente en Francia, donde ya se había ocupado el capitán Flye S^{te}. Marie[19], y en donde la última edición del tratado de Roché y Comberousse contiene un resumen de las doctrinas lobachefskianas como apéndice, Hoüel, por otra parte, había traducido al francés algunas obras de Bolyai y Lobachefski, de cuyas traducciones unas publicó y otras han quedado inéditas. Clifford las introdujo en Inglaterra y Bruce Halstedt ha dado á la ciencia una bibliografía completa de la Geometría No-Euclidea[20], que en unión con él divulgan en los Estados Unidos Story, Stringham y otros insignes matemáticos. Rusia[21], la cuna de Lobachefski, continúa también por la senda que éste trazó. Por mi parte hago votos porque esta disciplina que me es tan querida y que desde hace mucho tiempo me interesa, prospere y se difunda. Todo parece augurarle hoy un brillante porvenir, y después de haber ganado las Universidades, promete hoy invadir los gimnasios é institutos. Ojalá su enseñanza arraigue y florezca en nuestra patria.

PROF. DR. VENTURA REYES

Cuenca, 8 de Diciembre de 1893.

Lista de las obras citadas

1. Vollständige Theorie des Parallellinien.- Mainz, 1815.

2. Commentatio in primum Euclidis Elementorum librum.- Stuttgart, 1814.

3. Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, herausgegeben von Peters.- Altona, 1860-1865.

4. Developpement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques.- Genève, 1774.

5. Géométrie.- Notes.- Muchas ediciones.

6. Werke.- Band IV.- Gottingen, 1877.
7. Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher.
8. Los principios de la Geometría (en ruso).- Kasan, 1829-30.
   Geometría imaginaria (ruso).- Kasan, 1835.
   Géométrie imaginaire.- Berlín, 1837.
   Nuevos principios de Geometría, con una teoría completa de las paralelas (ruso).- 1836-1838.
   Geometrische Untersuchugen zur Theorie der parallellinien.- Berlín, 1840.
   Pangeometría (ruso).- Kasan, 1855.
9. Tentamen juventutem studios am in elementa Matheseos introducendi. Appendix, Scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitato Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.- Auctore Johanne Bolyai.- Maros Vasarhely, 1832.
10. Ueber die Hypothesen welche der geometrie zu grunde liegen. Gotting. Abh. 1867.
11. Ueber die Thatsache welche der geometrie zu grunde liegen. Gott. Nachr. 1868.
12. Saggio di interpretazione della geometria Non-Euclidea.- Napoli, 1868.
13. Ueber die Sogennante Nicht-Euklidische Geometrie.- Math. Ann. Ban IV y siguientes.
14. Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la mécanique.- Bordeaux, 1879.
15. Vorlesungen über neuere geometrie.- Leipzig, 1882.
16. Killing.- Die Nicht.- Euklidische Raumformen.- Leipzig, 1885.
17. Absolute Geometrie (Elemente der).- Leipzig, 1876.
18. Dei primi principi della Meccanica e della geometria.- Firenze. 1869.
19. Etudes analytiques sur la théorie des Paralléles.- París, 1871.
20. American Journal of Mathematics. Vol. I y II.
21. Entre los pangeómetras rusos citaremos á Vassilief, Smirnoff, Souvoroff, Sanichefski, etc.

Algunas Propiedades referentes á los sistemas de círculos, demostradas sin el auxilio de relaciones métricas ni del postulado Euclídeo[1]

POR D. VENTURA REYES PRÓSPER

Catedrático del Instituo de Cuenca

Las ventajas de simultanear el estudio de la Geometría del espacio con el de la Geometría plana, no considerándolas como dos cosas ajenas entre sí, ha sido sentida desde hace algún tiempo por los más eminentes geómetras. Frecuentemente se cita entre estos últimos á Poncelet y Monge.

Yo añadiré que la nueva Geometría de posición, libre de relaciones métricas, y aun del postulado Euclídeo referente á las paralelas, está precisamente basada en la introducción de elementos tomados fuera del plano para demostrar propiedades referentes al plano.

En el predente trabajito me propongo hacer patente, cómo siguiendo los métodos de Monge y Hankel se puede llegar á establecer con todo rigor proposiciones vulgares referentes al círculo, con independencia de medidas y de paralelas.

Voy ante todo á demostrar el siguiente

LEMA*: Suponiendo dos rectas* ao ao' *que se cortan en el punto común* a, *si levantamos á dichas dos rectas en el plano que las contiene á ambas y en los puntos* o *y* o' *respectivamente, las perpendicular es correspondientes, digo que será siempre posible hallar un ángulo* oao' *tal, que conservando* ao *y* ao' *sus longitudes, se corten las dos perpendiculares en un punto* ω.

Claro que sólo colocándonos bajo el punto de vista No-Euclídeo, necesitamos demostrar esta proposición.

Sea *oa* la mayor de las dos rectas, tracemos alrededor de *a* con el radio *ao'* una circunferencia. Levantemos en *o* la perpendicular á *oa*; tomemos en la parte

[1]*El Progreso Matemático*, Segundo semestre, 1895, pp. 205-208.

de *oa* que cae hacia la izquierda un punto *x*; desde *x* tracemos una de las dos tangentes á la circunferencia; resultará que esta tangente corta necesariamente á la perpendicular en un punto , pues para tocar al círculo debe pasar á la región derecha del plano.

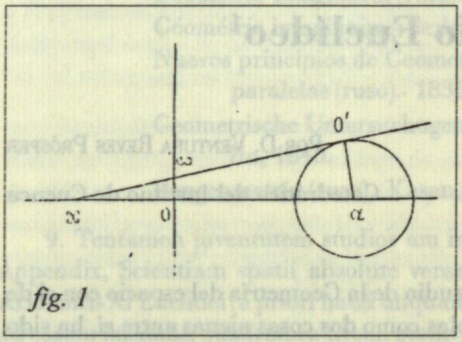


fig. 1

Uniendo entonces *a* con el punto *o'* de contacto tendremos el ángulo *oao'* deseado.

Este lema nos basta para probar la siguiente proposición, conocida desde hace mucho tiempo, pero demostrada siempre dentro de la geometría Euclídea y de las relaciones métricas. *Dados dos círculos en un plano, existe sobre la recta que une sus centros un punto tal que levantando en él una perpendicular á la línea de los centros, goza dicha perependicular de la propiedad de que trazando desde cualquiera de sus puntos las dos tangentes á los dos círculos, estas tangentes son iguales para cada punto.* Esta recta perpendicular es la que se ha llamado recta de *potencia igual* (según Jacob Steiner) ó *eje radical* (según Gaulthier de Tours).

Sólo tenemos que servirnos del lema establecido antes y de una proposición tan simple como ésta: *Todas las tangentes que desde un punto se pueden trazar á la esfera son iguales.*

En la demostración distinguiremos dos casos, según que los dos círculos dados se corten ó no.

1^er^ caso. *Los dos círculos se cortan en los puntos d y d', oao' siendo la línea de los centros.*

Hagamos girar las dos mitades de plano alrededor de la recta *add'*, de modo tal que el ángulo *oao'* sea á propósito (fig. 2ª) para que se corten en un punto ω las dos perpendiculares levantadas en *o* y *o'* á las dos mitades de plano P y Q. Ya sabemos que estas dos perpendiculares están contenidas en el plano de *oao'* y que son respectivamente perpendiculares á *oa* y *oa'*, como puede verse demostrado pangeométricamente en algunos tratados (FRISCHAUF, por ejemplo). Ahora bien, este punto ω dista igualmente de todos los puntos de la circunferencia *o*, y de todos los puntos de la circunferencia *o'*, y estas distancias son iguales á $\omega d = \omega d'$. Esto quiere decir que ω es el centro de una esfera que contiene á las dos circunferencias o y o'. Si, pues, desde cualquier punto de la recta dd' se trazan tangentes á las dos circunferencias, estas tangentes serán iguales por ser tangentes á una misma esfera.

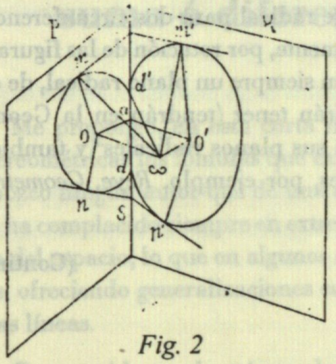


Fig. 2

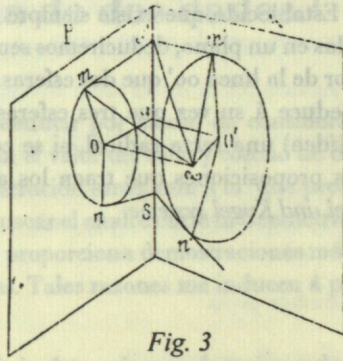


Fig. 3

El caso en que las dos circunferencias fuesen tangentes, lo trataríamos como el caso que acabamos de estudiar.

2º caso. *Las dos circunferencias no se cortan, oao' es la línea de los centros.*

Tracemos esta línea; tomemos sobre el plano un punto s y su simétrico s', con respecto á oo', tales que las tangentes trazadas á las dos circunferencias sean iguales entre sí[2].

La recta ss' cortará entonces á la línea de los centros en a y le será perpendicular.

Hagamos girar las dos mitades del plano alrededor de la línea ss' de modo que ocupen las posiciones P y Q, elegidas de modo que el ángulo oao' sea tal que las perpendiculares levantadas en o y o' á P y Q (perpendiculares respectivamente se consecuencia á oa y $o'a$) se corten en un punto ω.

Unamos ω con m, m' y s'. Los triángulos $\omega ms'$ $\omega m's'$ son rectángulos por el teorema de las tres perpendiculares, y como tienen iguales la hipotenusa y un cateto, deberán ser iguales, de donde $\omega m = \omega m'$. Ahora bien, todos los puntos de la circunferencia o distan de ω la longitud ωm y todos los puntos de la circunferencia o' distan de ω la longitud $\omega m'$; luego por ser como hemos dicho $\omega m = \omega m'$,

[2]Esto es muy fácil, sabiendo que el lugar de los puntos desde los cuales las tangentes trazadas á una circunferencia tienen una longitud dada λ, es otra circunferencia concéntrica. Elegiremos la magnitud λ de tal modo, que las dos circunferencias correlativas á las dos propuestas, se corten en los puntos ss', lo cual es posible, y entonces $sm = sm' = \lambda$.

resultará que ω es el centro de una esfera sobre la cual caen las dos circuferencias *o* y *o*', siendo en consecuencia iguales las tangentes trazadas á ambas desde un punto arbitrario de la recta *ss*'.

Establecido que existe siempre un eje radical para dos circunferencias situadas en un plano, deduciremos sencillamente, por rotación de las figuras alrededor de la línea oo' que dos esferas tienen siempre un plano radical, de donde se deduce á su vez que tres esferas podrán tener (tendrán en la Geometría Euclídea) una recta radical, si se cortan sus planos radicales[3] y también las otras proposiciones que traen los autores, por ejemplo, *Reye, Geometrie der Kugel und Kugel systeme.*

(Continuará)

[3]Esto se saca de que *si los tres ejes radicales de tres circulos se cortan, lo hacen en un solo punto* (demostración usual).

Nueva demostración de las fórmulas trigonométricas de un ángulo igual á la suma ó diferencia de dos dados.[1]

Me propongo, en esta corta nota, deducir por medio de consideraciones estereométricas las fómulas que expresan el valor del seno y coseno de $\alpha \pm \beta$. No conozco ningún autor que dé una demostración semejante á la que presento, y me ha complacido siempre en extremo buscar el enalce entre la Geometría plana y la del espacio, lo que en algunos casos proporciona demostraciones más sencillas, ofreciendo generalizaciones curiosas. Tales razones me inducen á publicar estas líneas.

Es conocido que la raíz cuadrada de la determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

cuyo valor es susceptible de tomar todos los comprendidos entre -1 y +1, éstos incluidos, ha sido denomida por el geómetra alemán Christián von Staudt, seno de un triedro cuyas caras son α, β, γ. Es evidente que dos triedros simétricos tendrán igual seno.

Si se quiere dar á esta definición una interpretación geométrica es fácil hacerlo y se ha llegado así á establecer la sabida fórmula

$$\frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}} = V$$

en la que V expresa el volumen del tetraedro que resulta de tomar á partir del vértice del triedro y sobre cada una de sus aristas, una longitud igual á la unidad.

Es probable que la consideración de la determinante de segundo grado

[1]*Archivo de Matemáticas Puras y Aplicadas* I, 5, mayo 1896, pp. 89-91.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\alpha$$

condujese al ilustre profesor de Erlangen á la idea del seno del triedro expresada por la determinante de tercer grado.

Comenzaré por hallar el valor de $\cos(\alpha\pm\beta)$ para luego deducir el de $\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)$.

Supongamos ahora que $\gamma=\alpha\pm\beta$.

En este caso las tres aristas que formaban el triedro vienen á colocarse en un plano y el seno del triedro debe valer cero, pues el volumen que entonces se obtiene es nulo.

Tendremos pues

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando la determinante por la regla de Sarrus se saca:

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0$$

ú ordenando con respecto á cos γ,

$$\cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado con respecto á cos γ se halla:

$$\begin{aligned}
\cos\gamma &= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta + 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} \\
&= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\beta} \\
&= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\beta\,(1 - \cos^2\alpha)} \\
&= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\beta\operatorname{sen}^2\alpha} \\
&= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha\,(1 - \cos^2\beta)} \\
&= \cos\alpha\cos\beta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta} \\
&= \cos\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

Esta es la fórmula que deseábamos obtener. De ella se deduce muy fácilmente ésta:

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta \pm \text{sen}\,\beta \cos\alpha$$

En efecto, si hacemos $\gamma' = 90^{\circ} - \alpha - \beta$ tendremos, por ejemplo,

$$\cos\gamma' = \text{sen}(\alpha \pm \beta) = \cos[90^{\circ} - (\alpha + \beta)] =$$

$$= \cos[(90^{\circ} - \alpha) - \beta] = \cos(90^{\circ} - \alpha)\cos\beta + \text{sen}(90^{\circ} - \alpha)\,\text{sen}\,\beta$$

ó sea

$$\text{sen}\,\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cos\alpha$$

La discusión y generalización de éstas fórmulas para cualquier valor de α y de β se hace con tan extremada simplicidad que no creo oportuno el insistir sobre ésto.

DR. VENTURA REYES PRÓSPER,

Catedrático.

Nota sobre un punto de Geometría No-Euclídea[1]

Defínese en los tratados de Geometría elemental la longitud de un arco curvilíneo, diciendo que es el límite común hacia el que tienden los perímetros poligonales inscritos y circunscritos á este arco, á medida que sus lados tienden hacia cero. Supone esta definición establecidas ya algunas proposiciones que previamente se demuestran, y esta demostración se efectúa sin ninguna dificultad en la Geometría vulgar ó euclídea, pero si se quiere extender el procedimiento demostrativo á la Geometría no-euclídea, colocándose en el punto de vista de Lobatchefsky, hay que hacer inprescindiblemente algunas variaciones en el razonamiento, variaciones que no sé yo haya hecho aún ningún autor.

Para exponer mis ideas comenzaré por recordar brevemente el punto de partida de la definición de que trato. Empiézase por probar que la relación de los perímetros de una línea quebrada inscrita en un arco y de la circunscrita correspondiente tiende, á medida que los lados disminuyen, hacia la unidad, á la que puede acercarse tanto como queramos haciendo suficientemente pequeños los ángulos que cada lado de la línea inscrita forma con sus contiguos de la línea circunscrita.

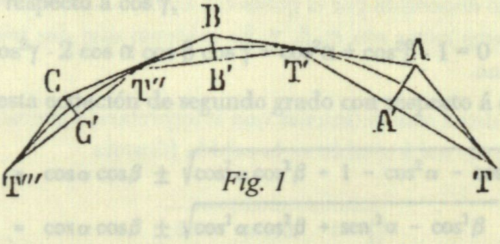


Fig. 1

Proyectando ortogonalmente (fig. 1) el contorno TAT'BT"CT"' sobre el contorno TT'T"T"' se obtienen los puntos A', B' y C'.

La relación

$$\frac{TA+AT'+T'B+BT''+T''C+CT'''}{TA'+A'T'+T'B'+B'T''+T''C'+C'T'''}$$

[1]*Archivos de Matemáticas Puras y Aplicadas* II, 3, marzo 1897, pp. 44-47.

del perímetro circunscrito al inscrito, tiene el mismo límite que cada una de las relaciones entre la mayor y la menor de las que se halla comprendida.

Todo queda pues reducido á probar que la relación AT/TA' tiende hacia la unidad á medida que numerador y denominador tienden hacia cero.

A este fin se toma (fig. 2) un triángulo auxiliar $O\alpha\alpha'$ cuyo lado $O\alpha'$ es una longitud fija y cuyo ángulo en α' es recto.

Haciendo decrecer de un modo indefinido y continuo el ángulo $\alpha O\alpha'$, la relación $\alpha O/\alpha' O$ disminuye de un modo continuo ($O\alpha'$ permanece fija por hipótesis) acercándose

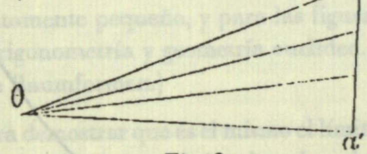


Fig. 2

a 1 tanto como queramos, pues αO se puede acercar á $\alpha' O$ tanto como queramos también.

Ahora, comparando el triángulo ATA' con uno semejante $O\alpha\alpha'$, construido sobre $O\alpha'$ como lado homólogo del TA', tendremos

$$\frac{AT}{A'T}=\frac{O\alpha}{O\alpha'}$$

y como $O\alpha/O\alpha'$ tiende hacia 1, TA/TA' también tenderá hacia 1.

Luego

$$\frac{TA+AT'+T'B+BT''+T''C+CT'''}{TA'+A'T'+T'B'+B'T''+T''C'+C'T'''}$$

tiene también la unidad por límite.

El resto de la demostración lo omito, porque es innecesario al fin que me propongo el recordarlo, y harto conocido.

Vengamos ahora á nuestro objeto. Como en la Geometría de Lobatchefski no existen figuras semejantes (Según Wallis había adivinado[2]) el giro de la demostración tiene que ser diferente.

---

[2]Véase STAECKEL u ENGEL, Parallelentheorie von Euklid bis auf Gauss.

Siguiendo la costumbre, que Gauss me parece haber el primero introducido en la ciencia (véanse las cartas á Schumacher) de representar en la Geometría no-euclídea ciertas líneas rectas por curvas, á fin de hacer más exagerado á la vista lo que con el cálculo se quiere probar, supongamos (fig. 3) el triángulo rectilíneo lobatchefskiano *taa'*, rectángulo en *a'*, en lugar del euclídeo *Oαα'*. El lado *ta'* es fijo y el ángulo *ata'* variable. Coloquemos el triángulo TA'A de la fig. 1 sobre la fig. 3, de modo que el lado TA' venga á colocarse en tA_1 y tomemos el ángulo *ata'* y el lado *ta'* (este lado, aunque fijo, es arbitrario) suficientemente grandes para que TA caiga dentro del triángulo *taa'*, en tA_1 por ejemplo. Prolonguemos tA_1 lo bastante para que encuentre al lado *aa'* en A_2.

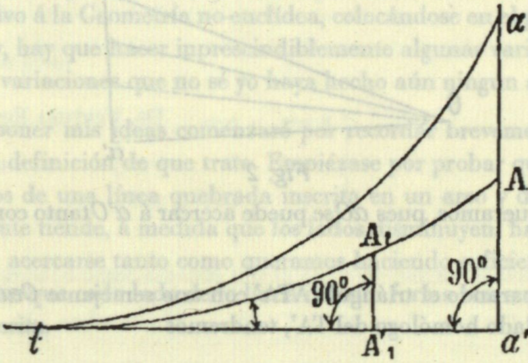


Fig. 3

La relación *ta/ta'* se acerca tanto como se quiera á la unidad cuando estando fijo *ta'*, *ta* se mueve hacia *ta'*. Luego tA_2/ta' se puede aproximar á 1 tanto como queramos, haciendo bastante pequeño el ángulo A_2ta'.

Vamos á probar que también la variable tA_1/tA'_1 tiene por límite 1.

Basta demostrar que la hipótesis de Lobatchefsky[3]

$$\frac{tA_1}{tA'_1} < \frac{tA_2}{ta'}$$

para todas las posiciones de A_1 comprendidas entre A_2 y t.

Pero según la geometría no-euclídea, tenemos: (vése p. e. GERARD, Thèse doctorale, Paris, Gauthier-Villars, 1893)

[3]En la de Euclides sería $tA_1/tA'_1 = tA_2/ta'$.

$$\frac{ta'}{tA'_1} < \frac{tA_2}{tA_1} \text{ ó sea } \frac{ta'}{tA'_1} : \frac{tA_2}{tA_1} < 1$$

cuya última desigualdad equivale á la propuesta

$$\frac{tA_1}{tA'_1} < \frac{tA_2}{ta'}$$

Con esto nos es suficiente para nuestro objeto, pero es fácil ver además hacia qué límite tiende la relación tA_1/tA'_1, de la hipotenusa á su cateto horizontal, cuando A_1 se mueve sobre una misma recta, de A_2 á *t*. Este límite no es otro que la unidad dividida por el coseno euclídeo del ángulo $A_1tA'_1$, pues en el límite, el triángulo sería infinitamente pequeño, y para las figuras infinitamente pequeñas, son ciertas la Trigonometría y geometría euclídea. (Véase p. e. KILLING, Die nicht-euklidische Raumformen.)

Lo demás, para demostrar que es el mismo el límite del contorno poligonal inscrito que el del circunscrito, se hace de igual modo en la Geometría no-euclídea, y por ésto y por estar expuesto en todos los tratados, no me ocupo de ello, terminando aquí esta nota.

VENTURA REYES PRÓSPER

Catedrático del Instituto de Cuenca.

Bibliografía[1]

Restitución de una de las obras perdidas de euclides.

Conocido es el hecho de que las obras geniales de los excelsos geómetras griegos no nos han llegado, en su mayor parte, más que mutiladas, algunas veces sólo por traducciones del árabe, y que buena parte de ellas las podemos considerar como definitiva o casi definitivamente perdidas para nosotros. El pueblo latino, amante sólo de vanos retóricos y de cuestores y pretores ladrones, dotado solamente de una inteligencia limitada y rudimentaria, no podía comprender bien cómo los habitantes de la divina Hélade y de sus colonias se apasionaban, y en tanto grado, por la Geometría, y Cicerón que llama a Arquímedes *homo humilis*, no acierta sin duda a explicarse esta pasión cuando dice: *In summo honore apud graecos Geometria fuit.* En cambio, aquel Platón, tipo de filósofos, había colocado en las puertas de la Academia esta inscripción: *Nadie entre que no sepa la Geometría.* Por esta escasa inteligencia del pueblo latino se explica bien el que dejara sin traducir, y aun el que permitiese que se perdiesen, tantas y tantas obras colosales del ingenio heleno, producto de un pueblo simpático, pasmo y maravilla del mundo, portento de la naturaleza y fenómeno único en la Historia de la humanidad.

Los talentos más esclarecidos de los antiguos y de los actuales tiempos no se han desdeñado de traducir y de comentar esas obras que desafían a los siglos y que serán eternas, pues la verdad lo es. Con repecto a las que se han perdido, los sabios han tratado de adivinar, por lo menos, de qué trataban, rehaciéndolas o restituyéndolas con el apoyo de escasos fragmentos, cuando los hay, a la manera como el paleontólogo da ser y animación a especies que vivieron en las pasadas épocas geológicas y hoy están estinguidas. Vieta, en su *Apollonius Gallus*, trató de adivinar la obra de Apolonio de Perga sobre los contactos, en la que este geómetra se ocupaba del problema de trazar un círculo tangente a tres círculos dados, y Viviani se ocupó de restituir el tratado del mismo Apolonio sobre los lugares sólidos, asunto en el que se dice trabajó durante cuarenta años.

Miguel Chasles y Roberto Simson intentaron, el primero en el pasado siglo y el segundo en el antepasado, rehacer el tratado de los *Porismas* de Euclides, y consiguieron, cuando menos, dotar a la Ciencia matemática de dos obras de mérito indiscutible. Desgraciadamente otras obras de Euclides, aquel *genio*

---

[1] *Revista matemática Hispano-Americana*, I, 10. 1919. pp. 323-325.

dulce y amable, *enemigo de toda disputa*, que Proclo nos pinta, se han perdido, con pocas esperanzas de restitución, como sucede con la *Pseudaria*, colección de proposiciones falsas, demostradas falsamente, trabajo adecuado para adiestrar a los jovenes en buscar el defecto que una demostración pueda tener, habituándoles a discurrir con seguridad; sin duda que ésta sería no sólo muy notable, sino también muy útil, pues el poner patentes los puntos débiles de un razonamiento o el aclarar las paradojas aparentes que a veces se presentan, es cosa la más provechosa para la educación de la inteligencia.

Perdido era también hasta muy poco hace, para los amantes de la Geometría, el libro de Euclides sobre la división de las figuras (πει διαιρετεων οιζλιον), del cual sólo se sabía la existencia por Proclo, y que trataba de la división de un área en partes semejantes o no semejantes a ella, que cumpliesen con determinadas condiciones y que guardasen las unas con las otras una razón dada. El sabio Dr. Raymond Clare Archibald emprendió los trabajos para, seriamente y basándose principalmente en traducciones del árabe y en un libro de Leonardo de Pisa, devolvernos esta joya extraviada, y fruto de su concienzuda labor es la obrita titulada *Euclid's book on division of figures, with a restoration based on Woepcke's text and the practica geometriae of Leonardo pisano*, publicado por las prensas de la Universidad de Cambridge, en Inglaterra, con el esmero propio de éstas.

El autor es uno de los discípulos del famoso helenista y latino Alfredo Deane Sonith, a quien llama el autor *maravilla de todos los que le conocieron*. Primeramente están colocados en capítulos separados y cuidadosamente copiados y comentados todos los antecedentes del libro, las fuentes en que el autor ha bebido y los fragmentos de algunas obras que ha podido utilizar, y luego, al fin, el tratado completo de Euclides, tal como supone que debió ser hecho, llevando el trabajo con sagacidad y perspicacia extremas, con exquisito tacto y buen gusto matemático, con profundo conocimiento de la Geometría griega y de sus métodos, de tal modo, que la ilusión es casi completa. Los problemas que Euclides trata son referentes a dividir un polígono dado, por rectas paralelas a una dirección dada, o que pasen por un punto dado, según una razón dada. Euclides va tratando cada caso en particular, según la manera de los griegos.

Merece felicitaciones y plácemes este insigne profesor, tanto más cuanto que la teoría elemental de áreas contiene como parte esencial lo que los ingleses llaman partición y disección de las figuras, parte que debe de jugar un papel esencial en la enseñanza de los escolares. Los ejemplos que de estas particiones y disecciones traen en sus tratados y artículos Ozanam, Lucas, Perigal y otros, son muy interesantes para los jovencitos, así como también los comprendidos en el libro de los doctores Yung (esposo y esposa), titulado *El pequeño geómetra*, destinado a iniciar en la Geometría a un niño hijo de ambos. No hay que olvidar tampoco el opúsculo de Sundara Row, el matemático indio: *On paper folding*, ni que Arquímedes ya inventó un juego llamado *latrunculus*, que creo Heiberg ha sido el que lo ha restituído, juego que consistía en trasposiciones y disecciones de figuras representadas materialmente por laminillas de madera y marfil o hueso.

Esto es semejante a una lindísima colección de rompecabezas, en madera, que hace años me regaló un matemático francés a cambio de una colección de cantares populares españoles. Acaso estas cosas parezcan fútiles; pero yo diré que de las cosas elementales hay medio de pasar a las superiores, como lo hay de pasar de las superiores a las elementales. Nunca olvidaré que uno de los hermanos Wiener me enseñó amablemente, por carta, a construir con matemática exactitud, sin compás ni regla y sin ruptura, pero sí con duplicatura, todos los poliedros regulares, sin más material que una serpentina y los dedos.

¿Y cuántas cosas no dice al modesto principiante, como el geómetra consumado, uno de estos poliedros? Es bueno vulgarizar la Ciencia, pues pasaron los tiempos en que Hipassus era castigado por los dioses por haber divulgado la existencia del dodecaedro regular, y hoy Dios se complace en los contrario, pues ha dicho: ¡Ay de vosotros, doctores de la Ley, que os alzasteis con la llave de la sabiduría: vosotros no entráis y no permitís que nadie entre tampoco!

VENTURA REYES PRÓSPER